Les polynômes du 2nd degré
- partie 2 -

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme
$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration au programme :

On a vu dans la partie 1 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :
$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Se faire la main :

- Résoudre les équations suivantes dans la partie exercices :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Regardons la résolution de la 1ere en vidéo ici : **https://youtu.be/youUIZ-wsYk**

Exercices : n° 22, 23, 24, 31 et 42 page 87.

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

Problèmes :

- Existe-t-il 2 nombres dont la somme est 21 et le produit 104 ?
- Un champ rectangulaire a pour périmètre 36 m et pour aire 32 m². Déterminer les dimensions de ce champ.

II. Factorisation d'un polynôme du 2nd degré

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur R par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Exercices : n° 97 page 87.

III. Signe d'un trinôme

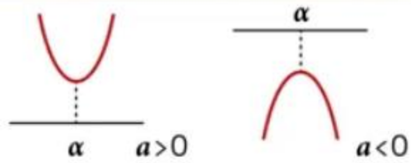
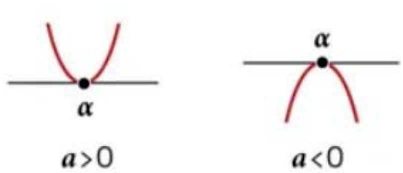
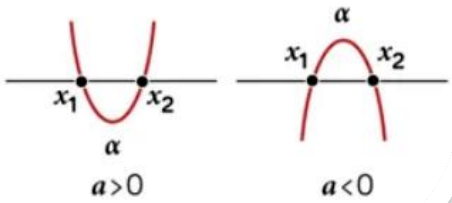
Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : $\cup$

- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : $\cap$

Propriété :

	SOLUTIONS DE $ax^2+bx+c=0$	SIGNE DE $P(x)=ax^2+bx+c$	POSITION DE LA PARABOLE par rapport à l'axe des absisses
$\Delta<0$	Pas de solution	x : $-\infty$ … $+\infty$; $P(x)$: signe de a	
$\Delta=0$	Une solution double $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	x : $-\infty$, $-\frac{b}{2a}$, $+\infty$; $P(x)$: signe de a | 0 | signe de a	
$\Delta>0$	Deux solutions distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $P(x)$: signe de a | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de a (en supposant ici $x_1<x_2$)	

Exercices : n° 63 page 62 + n° 99 et 100 page 95.

IV. Inéquations du 2nd degré

Rappel **:** Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.
Exemple **:** $(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x+2=0.$

méthodologie : étudier le signe de x^2+x-2 sur R .

1. On étudie le signe de chacun des facteurs.
2. On dresse un tableau de signes pour étudier le signe du produit des facteurs.
3. On conclue.

Exemple : Résoudre l'inéquation $-x^2+5x-6 \geq 0$

On a $-x^2+5x-6=(x-2)(-x+3)$.

Exercices : n° 38 p 60 + n° 82 p 64 + n° 86 et 88 p 65.